

Todennäköyslaskenta sivuaineopiskelijoille, demo5 10.10.2013

1. Pelaajan todennäköisyys osua maaliin on aluksi 0.2, mutta kunkin heiton jälkeen osumistodennäköisyys kasvaa 0.1:llä harjaantumisen vuoksi. Olkoon Z osumien määrä viidellä heitolla. Laske odotusarvo $E(Z)$ ja varianssi $Var(Z)$.
2. Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa $c(1-x^2)$, kun $-1 \leq x \leq 1$, ja nolla muualla. a) Mikä on vakion c arvo? b) Mikä on jakaumafunktio (määrittele tarkasti kaikilla x :n arvoilla)? c) Piirrä tiheys- ja jakaumafunktiot. d) Mikä on X :n odotusarvo ja varianssi? e) Laske tapauksen $-1/2 \leq X \leq 1/2$ todennäköisyys. f) Millä todennäköisyydellä $X = 1/2$?
3. Jatkuvan satunnaismuuttujan X jakaumafunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ c\sqrt{x}, & \text{kun } 0 \leq x < 16, \\ 1, & \text{kun } x \geq 16. \end{cases}$$

Määritä vakion c arvo ja laske satunnaismuuttujan $Y = 2X - 1$ odotusarvo ja varianssi.

4. a) Oletetaan, että $X \sim N(0, 1)$. Laske $P(X \leq 2.23)$, $P(X \geq 2.23)$, $P(X \leq -2.23)$ ja $P(X \geq -2.23)$. b) Oletetaan, että $X \sim N(5, 3)$. Laske $P(X \leq 7.23)$, $P(X \geq 7.23)$, $P(X \leq 3.23)$ ja $P(X \geq 3.23)$.
5. Olkoon satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f(x) = 2e^{-2x}$, kun $x > 0$ ja nolla muilla x :n arvoilla. Mikä on satunnaismuuttujan X odotusarvo, varianssi, moodi ja mediaani?
6. Kone pakkaa voita 400g:n pakkauksiin. On havaittu, että koneen tekemien pakkauste painolla on normaalijakauma, jonka varianssi on 3. a) Jos pakkauksien painon keskiarvo on 400g, niin millä todennäköisyydellä pakkaus painaa vähintään 398g mutta enintään 402g? b) Mikä pitäisi keskiarvon olla, jotta 90% pakkauksista painaisi vähintään 400g? c) Millä keskiarvokeskisellä välillä paino tällöin on 99% varmuudella; entä 99,9% varmuudella?