

Todennäköisyytlaskenta sivuaineopiskelijoille, demo4 3.10.2013

1. a) Ovatko seuraavat tapaukset riippumattomat: A ja \emptyset ; A ja Ω , A ja A^c ?
b) Oletetaan, että $|(A \cup B)^c| = k$, $|A - B| = l$, $|(A \cap B)| = m$ ja $|B - A| = n$ ja kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköiset. Osoita, että A ja B ovat riippumattomat, jos $mk = ln$. Piirrä Venn-diagrammi.
2. Kahta noppaa heitetään. Olkoon satunnaismuuttuja X suurempi silmäluvuista (jos silmäluvut ovat samat, niin satunnaismuuttujan X arvo on tämä silmäluku). Määrää satunnaismuuttujan todennäköisyys- ja jakaumafunktio sekä piirrä niiden kuvaajat. Laske lisäksi odotusarvo ja varianssi.
3. Todista lause 2.4, eli osoita, että annettu todennäköisyysfunktio todella on todennäköisyysfunktio ja laske sen perusteella satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi.
4. Lehtipojan päivässä myymien sanomalehtien lukumäärän X todennäköisyysfunktio on

$$p(k) = P(X = k) = \begin{cases} c \cdot k & , \text{ kun } k = 1, 2, \dots, 50 \\ c \cdot (100 - k) & , \text{ kun } k = 51, 52, \dots, 100 \\ 0 & , \text{ muulloin.} \end{cases}$$

- a) Määrää vakion c arvo; b) Laske todennäköisyydet tapahtumille ($X > 50$), ($X < 50$) sekä ($25 \leq X \leq 75$); c) Laske seuraavat $P(x < 50 | 25 \leq X \leq 75)$ ja $P(x = 50 | 25 \leq X \leq 75)$.
5. Nappula on jäänyt jälki-istuntoon. Jalomielinen opettaja lupaa kuitenkin vapauttaa nappulan heti, kun hän on ratkaissut yhden matematiikan tehtävän oikein. Jokaisen tehtävän ratkaisemiseen ja tarkastamiseen kuuluu yhteensä tasan 10 minuuttia. Nappulan vastaukset ovat oikein todennäköisyydellä $1/7$. a) Laske todennäköisyys, eettä jälki-istunto kestää korkeintaan tunnin, sekä laske jälki-istunnon keston odotusarvo ja varianssi.
b) Laske samat arvot, kun nappula vapautetaan vasta kolmannen oikean vastauksen jälkeen.
6. Luennoitsija päättää testata opiskelijoiden vireystilaa kysymällä satunnaisilta opiskelijoilta helppoja kysymyksiä luennon aiheesta. Luennolla on 100 opiskelijaa, joista 10 on unessa tai omissa ajatuksissaan. Luennoitsija kuulustelee viittä opiskelijaa. Millä todennäköisyydellä ainakin neljä heistä osaa vastata luennoitsijan kysymyksiin? Laske tämä todennäköisyys a) tarkasti, b) binomijakauma-approksimaatiolla, c) approksimoimalla b) kohdan binomijakaumaa edelleen Poisson-jakaumalla.