Poissonin prosessi

Tarkastellaan tapausta, joka sattuu toistuvasti silloin tällöin, kun aikaa kuluu (esim. asiakkaiden saapuminen liikkeeseen, töiden saapuminen tietokoneelle jne.). Olkoon

$N(t) = t$:n pituisella aikavälillä sattuvien tapausten lukumäärä.

$N(t)$ on satunnaismuuttuja jokaisella t:n arvolla. Kun sitä tarkastellaan kaikilla t:n arvoilla, saadaan ns. stokastinen prosessi, jota merkitään $\{N(t), t \geq 0\}$.

Sanotaan, että $\{N(t), t \geq 0\}$ on *Poissonin prosessi*, jos

1. $N(t) \sim Po(\lambda t)$;
2. erillisillä aikaväleillä sattuvat tapaukset ovat riippumattomat.

Tällöin siis

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Lisäksi

$$E(N(t)) = \lambda t \quad \text{ja} \quad Var(N(t)) = \lambda t.$$

Koska $E(N(1)) = \lambda$, niin

$\lambda =$ yhden aikayksikön aikana keskimäärin sattuvien tapausten lkm.

Jos X on ensimmäisen tapauksen sattumiseen kuluva aika, niin $P(X > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^0/0! = e^{-\lambda t}$, joten $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, eli $X \sim Exp(\lambda)$. Yleisemmin voidaan osoittaa, että prosessi on Poissonin prosessi silloin ja vain silloin, kun sillä on seuraava kaksi ominaisuutta:

1. tapahtumien välisillä ajoilla on $Exp(\lambda)$ -jakauma;
2. tapahtumien väliset ajat ovat riippumattomat.

Voidaan myös sanoa, että

$1/\lambda$ on tapausten keskimääräinen aikaväli.

Jos sanotaan, että tapauksia sattuu keskimäärin λ kappaletta aikayksikössä, tarkoitetaan usein Poisson prosessia.

Esimerkki. Töitä saapuu tietokoneeseen Poissonin prosessina keskimäärin yksi kappale kymmenessä sekunnissa. Valitaan aikayksiköksi sekunti, jolloin siis $\lambda = 1/10$. Tällöin $N(t) \sim Po(0,1t)$.

Esimerkiksi $N(60) \sim Po(6)$, jolloin

$$\begin{aligned} &P(60\text{:ssä sekunnissa saapuu ainakin 4 työtä}) \\ &\qquad = P(N(60) \geq 4) = 1 - P(N(60) \leq 3)) \\ &\qquad = 1 - e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!}\right) = 0,849. \end{aligned}$$

Töiden välisellä ajalla on jakauma $Exp(0,1)$, joten keskimääräinen töiden välinen aika on $1/0,1 = 10$ sekuntia.