Esimerkki 3.5 $N(\mu, \sigma^2)$-jakaumalle on $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, joten $\ln f(x) = -\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - \ln\sqrt{\sigma^2} - \ln\sqrt{2\pi}$. Näin ollen

$$l(\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - n\ln\sqrt{2\pi}.$$

Maksimoidaan $l(\mu, \sigma^2)$ derivoimaalla se μ:n ja σ^2:n suhteen ja merkitsemällä derivaatat nolliksi:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\,\mu\right) = 0,$$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial\sigma^2} = \frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\,\sigma^2}{2\left(\sigma^2\right)^2} = 0.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x}$. Toisesta yhtälöstä saadaan $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$; sijoitetaan siihen $\mu = \bar{x}$ ja sievennetään:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2 = m_2' - \bar{x}^2.$$

Näin päädyttiin samoihin estimaatteihin, jotka saatiin momenttimenetelmällä. ▪

Esimerkki 3.7 Lasketaan regressiomallin $Y = a + b\,x + \epsilon$ suurimman uskottavuuden estimaatit edellisen esimerkin havaintoaineistolle:

$$\bar{x} = 26.6867,\quad \bar{y} = 16.6533,\quad \overline{xy} = 449.381,\quad \overline{x^2} = 725.187,$$

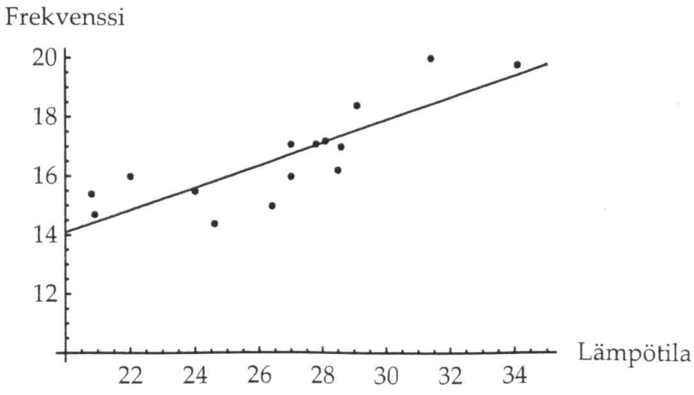
$$\hat{b} = \frac{(\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y})}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{449.381 - 26.6867\cdot 16.6533}{725.187 - 26.6867^2} = 0.381284,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x} = 16.6533 - 0.381284\cdot 26.6867 = 6.47809.$$

Kun lasketaan estimoidut frekvenssit $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}\,x_i$, voidaan vielä laskea σ^2:n estimaatti:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = 0.8137.$$

Näin saatiin malli $Y = 6.478 + 0.381\,x + \epsilon$, $\epsilon \sim N(0, 0.8137)$. Piirretään malli ja havainnot samaan kuvaan:



Jos esimerkiksi lämpötila on 30 astetta, niin mallin ennustama frekvenssi on $6.478 + 0.381\cdot 30 = 17.9$. ▪