Esim 3.1 a) Poisson-jakauman, Po(λ), parametrin estimaattori saadaan yhtälöstä $E(X) = \overline{X}$, eli $\lambda = \overline{X}$. Estimaattoria merkitään $\hat{\lambda}$, joten $\hat{\lambda} = \overline{X}$.
Olkoon X tunnin aikana eräälle tietyömaalle saapuvien kuormien lukumäärä; oletetaan, että X:llä on Po(λ)-jakauma. Kahdeksan tunnin aikana on saapunut kuormia seuraavasti: 5, 7, 7, 5, 4, 5, 6 ja 6. Koska $\overline{X} = 5.6$, niin $\hat{\lambda} = 5.6$ ja X:llä on likimain Po(5.6)-jakauma.

b) Exp(λ)-jakauman parametrin λ estimaattori saadaan yhtälöstä $E(X) = \overline{X}$, eli $\frac{1}{\lambda} = \overline{X}$. Näin ollen $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$. Olkoon X tietyömaalle saapuvien kuormien välinen aika minuuteissa; oletetaan, että $X \sim$ Exp(λ). Väliajoista on saatu seuraavat havainnot: 8.1, 7.4, 12.5, 10.1, 14.2, 9.8. Koska $\overline{X} = 10.35$, niin $\hat{\lambda} = \frac{1}{10.35} = 0.0966$, jolloin X noudattaa likimain) Exp(0.0966)-jakaumaa.

c) Kun lähetettiin n sanomaa k kappaletta välittyi oikein. on $\hat{p} = \frac{k}{n}$. Momenttimenetelmällä voidaan merkitä $X = 1$ jos sanoma välittyy oikein, ja $X = 0$ jos sanomaan tulee virheitä. Tällöin $X \sim$ Ber(p), $E(X) = p$ ja yhtälöksi saadaan $\hat{p} = \overline{X}$. Jos k kappaletta välittyi oikein n:stä, niin $\hat{p} = \frac{k}{n}$.

d) Normaalijakauman, $N(\mu, \sigma^2)$, estimaattorit saadaan yhtälöistä $E(X) = \overline{X}$ ja $E(X^2) = M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Nyt $E(X) = \mu$ ja $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$, jolloin saadaan yhtälöt $\mu = \overline{X}$ ja $\sigma^2 + \mu^2 = M_2'$. Kun toiseen yhtälöön sijoitetaan $\mu = \overline{X}$, saadaan $\sigma^2 = M_2' - \overline{X}^2$. Näin ollen estimaattorit ovat $\hat{\mu} = \overline{X}$ ja $\hat{\sigma^2} = M_2' - \overline{X}^2$. Oletetaan, että tietyn eläimen painolla X on $N(\mu, \sigma^2)$-jakauma. Kun mitattiin 50 yksilön paino, saatiin $\overline{X} = 47.37$ ja $M_2' = 2301.2$. Näin ollen $\hat{\mu} = 47.37$ ja $\hat{\sigma^2} = 2301.2 - (47.37)^2 = 58.3$, eli painolla on likimain $N(47.37, 58.3)$-jakauma.

Esim 3.2 Poisson-jakauman todennäköisyysfunktio on $p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, joten

$$\ln p(k) = -\lambda + k\ln(\lambda) - \ln(k!)$$
$$\Longrightarrow l(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(-\lambda + k_i\ln(\lambda) - \ln(k_i!)) = -n\lambda + \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i=1}^{n}\ln(k_i!).$$

Maksimoidaan $l(\lambda)$ derivoimalla se λ:n suhteen: $l'(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} k_i$. Merkitään derivaatta nollaksi ja ratkaistaan λ saadusta yhtälöstä, niin saadaan λ:n estimaatiksi: $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \overline{X}$. Koska $l''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} k_i < 0$, niin $l(\lambda)$ on konkaavi ja kyseessä on maksimipiste. Näin päädytään siis samaan estimaattiin $\hat{\lambda} = \overline{X}$, joka saatiin momenttimenetelmällä (esim 3.1 a).

Esim 3.3 Ber(p)-jakaumalla on $p(k) = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$, joten uskottavuusfunktion logaritmi on $\ln p(k) = k\ln(p) + (1-k)\ln(1-p)$. Näin ollen

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n}(k_i\ln(p) + (1-k_i)\ln(1-p)) = \ln(p)\sum_{i=1}^{n} k_i + \ln(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^{n} k_i\right).$$

Maksimoidaan $l(p)$ derivoimalla se p:n suhteen:

$$l'(p) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} k_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} k_i\right) = \frac{(1-p)\sum_{i=1}^{n} k_i - p(n - \sum_{i=1}^{n} k_i)}{p(1-p)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i - pn}{p(1-p)}.$$

Kun tämä merkitään nollaksi ja ratkaistaan p, saadaan estimaatiksi $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \overline{X}$.

Esim 3.4 Exp(λ)-jakaumalla on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, joten $\ln f(x) = \ln(\lambda) - \lambda x$. Näin ollen

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(\ln(\lambda) - \lambda x_i) = n\ln(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Derivaatan nollakohdasta, $l'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, saadaan λ:n estimaatiksi $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = 1/\overline{X}$.

Esim 3.8 Tehdään n riippumatonta koetta. Kukin koe onnistuu todennäköisyydellä p. Oletetaan, että saatiin k kappaletta onnistuneita kokeita. Todennäköisyyden p estimaatti on $\hat{p} = \frac{k}{n}$. Tähän päädytään myös jos merkitään, että $X_i = 1$, jos i:s koe onnistuu, ja $X_i = 0$ muulloin. Tällöin $\sum_{i=1}^{n} X_i$ on onnistuneiden kokeiden lukumäärä, joten $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$. Seurauksen 3.1 mukaan $\hat{p}$ on p:n harhaton ja tarkentuva estimaattori.

Esim 3.9 Halutaan estimoida ihmisten pituuden odotusarvoa μ sellaisella otoskeskiarvolla, joka poikkeaa μ:stä korkeintaan a:n verran todennäköisyydellä 0.95, eli $P(|\overline{X} - \mu| < a) \simeq 0.95$. Saadaan lauseesta 3.3 ehto $\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$, joten $\frac{a\sqrt{n}}{\sigma} = 1.96$. Näin ollen $n = \left(1.96\frac{\sigma}{a}\right)^2$. Oletetaan, että $\sigma = 10$. Jos esimerkiksi $a = 1$, niin $n = 385$, mutta jos $a = 0.5$, niin $n = 1537$.

Esim 3.10 Oletetaan, että kun tehtiin 100 havaintoa, niin $\overline{X} = 54.07$ ja $S^2 = 83.40$. Tällöin lause 3.4 antaa

$$P\left(54.07 - 1.96 \cdot \frac{\sqrt{83.40}}{10} < \mu < 54.07 + 1.96 \cdot \frac{\sqrt{83.40}}{10}\right) \simeq 0.95$$

eli $P(52.2 < \mu < 55.8) \simeq 0.95$.

Esim 3.11 Oletetaan kuten edellisessä esimerkissä, että $\overline{X} = 54.07$ ja $S^2 = 83.40$, mutta havaintoja on nyt vain 20 kappaletta. Tällöin lauseessa 3.5 saadaan α:n arvolla 0.05 jolloin $t_{n-1;\alpha/2} = t_{19;0.025} = 2.093$ antaa

$$P\left(54.07 - 2.093 \cdot \frac{\sqrt{83.40}}{\sqrt{20}} < \mu < 54.07 + 2.093 \cdot \frac{\sqrt{83.40}}{\sqrt{20}}\right) \simeq 0.95$$

eli $P(49.8 < \mu < 58.3) \simeq 0.95$. Tämä on hiukan laajempi väli kuin $P(52.2 < \mu < 55.8) \simeq 0.95$, joka saatiin edellisessä esimerkissä.